Stefan y Boltzmann

$$U = \int_0^\infty U_\lambda \, d_\lambda = \sigma T^4$$

Ley de Planck

$$I(\nu,T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

Rayleigh - Jeans

$$\frac{2\nu^2 k_B T}{c^2}$$

$$I(\nu,T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

Aproximación de Wien

Efecto fotoeléctrico

$$\begin{aligned} E_{incidente} &= h\nu \\ &= E_{amarre} + E_{cinética} \\ &= h\nu_0 + \frac{1}{2}m_e v_e^2 \end{aligned}$$

Relación de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Principio de incertidumbre

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}}\Delta\vec{\boldsymbol{q}} \geq \frac{1}{2}\hbar$$

Operadores

$$\hat{B}f = g$$

Operadores hermíticos:

$$\int f_i^* \hat{L} f_j \, d\tau = \int f_j^* \hat{L}^* f_i \, d\tau$$

Funciones continuas

Además para las funciones continuas se cumple que:

$f + g = g + f$	Ley conmutativa
$c(f+g) = cf + cg$	Ley distributiva (c es una constante)
$f + (g+h) = (f+g) + h$	Ley asociativa
$f \cdot 0 = 0$	Elemento neutro
$f \cdot 1 = f$	Elemento unitario

Ejemplo: Suponga que conoce la velocidad de un proyectil de masa 1.0g con una precisión del orden de 1 $\boldsymbol{\mu m s^{-1}}$. Calcule la indeterminación mínima en su posición

Solución: La relación de incertidumbre viene dada por:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}}\Delta\vec{\boldsymbol{q}} \geq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\hbar$$

La incertidumbre mínima debe ser el valor más pequeño que pueda tomar esa desigualdad

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}}\Delta\vec{\boldsymbol{q}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\hbar$$

El valor de $\Delta\vec{\boldsymbol{p}} = \Delta(\mathrm{m}\vec{\boldsymbol{v}}) = m\Delta(\vec{\boldsymbol{v}}) + \vec{\boldsymbol{v}}\Delta\mathrm{m}$ pero experimentalmente se afirma que $\Delta m = 0$ así que $\Delta\vec{\boldsymbol{p}} = m\Delta(\vec{\boldsymbol{v}})$

$$\Delta\vec{q} = \frac{\frac{1}{2}\hbar}{\Delta\vec{p}} = \frac{\frac{1}{2}\hbar}{m\Delta(\vec{v})} = \frac{\hbar}{2m\Delta(\vec{v})}$$

$$\Delta\vec{q} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}}{2\cdot(1\times 10^{-3}\mathrm{kg})\cdot(1\times 10^{-6}\mathrm{ms}^{-1})}$$

$$\Delta\vec{q} = 5 \times 10^{-26}m$$

Ejercicio 1: Estime la indeterminación mínima en la velocidad de un electrón en una región unidimensional de longitud $2a_0$.

Solución: La relación de incertidumbre mínima viene dada por:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}}\Delta\vec{\boldsymbol{q}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\hbar$$

Además recordamos que $\Delta\vec{p} = m\Delta(\vec{v})$ y por lo tanto podemos despejar de aquí el valor de $\Delta(\vec{v})$ tomando $m = m_e$:

$$\Delta\vec{\mathrm{v}} = \frac{\frac{1}{2}\hbar}{\mathrm{m_e}\Delta\vec{\mathrm{q}}} = \frac{\hbar}{2\mathrm{m_e}\Delta\vec{\mathrm{q}}} = \frac{\hbar}{2\mathrm{m_e}(2\mathrm{a_0})} = \frac{\hbar}{4\mathrm{m_e a_0}}$$

$$\Delta\vec{\mathrm{v}} = \frac{1.055\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}}{4\cdot(9.11\times10^{-31}\mathrm{kg})\cdot\mathrm{a_0}}$$

A $\mathrm{a_0}$ se le conoce como radio de Bohr, cuya expresión analítica es:

$$\mathrm{a_0} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mathrm{m_e e^2}}$$

Y cuyo valor numérico es aproximadamente 52.9pm. a_0 aparece en el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno y es el radio de la órbita electrónica de menor energía.

$$\Delta\vec{\mathrm{v}} = \frac{1.055\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}}{4\cdot(9.11\times10^{-31}\mathrm{kg})\cdot(52.9\times10^{-12}\mathrm{m})}$$

$$\Delta\vec{\mathrm{v}} = 547291.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 547\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

8.1 a ¿A qué velocidad se debe acelerar un electrón para que alcance una longitud de onda de 3,0 cm?

Solución: Partimos de la relación de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v}$$

Despejamos el valor de la velocidad

$$v = \frac{h}{m_e \lambda} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\mathrm{kg}) \cdot (3 \times 10^{-2} m)} = 0.0242 \frac{m}{s}$$

8.2a La constante de estructura fina α, juega un papel especial en la estructura de la materia; su valor aproximado es de 1/137. ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón que viaja a velocidad αc, donde c es la velocidad de la luz? (Tenga en cuenta que la circunferencia de la primera orbita de Bohr en un átomo de hidrógeno es de 331 pm.)

Solución: Partimos de la relación de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v}$$

Debemos tener cuidado en no confundir la velocidad que nos dan, pues al estar "girando" el electrón alrededor del núcleo en realidad es una velocidad angular $\omega = \alpha c$ (¿Qué unidades tiene α?) y con ella debemos encontrtar la velocidad lineal necesaria para sustituirla en la expresión del momento lineal.

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot \frac{C}{2\pi}$$

$$v = \omega \cdot a_0$$

Por lo tanto:

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{m_e \omega a_0} = \frac{h}{m_e \alpha c a_0}$$

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\mathrm{kg}) \cdot \left(\frac{1}{137} m^{-1}\right) \cdot (3 \times 10^{8} \frac{m}{s}) * (52.9 \times 10^{-12}\mathrm{m})}$$

$$\lambda = 6.28m$$

8.4a Calcule la energía por fotón y la energía por mol de fotones para la radiación de longitud de onda de: (a) 600 nm (roja), (b) 550 nm (amarilla), (c) 400 nm (azul)

Solución: La energía de un fotón se obtiene de forma directa:

$$\boldsymbol{E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}}$$

$$\boldsymbol{E_{fotón}} = (6.626 \times 10^{-34}\mathrm{J\cdot s}) \cdot \frac{(3 \times 10^{8}\frac{m}{s})}{\boldsymbol{600nm \cdot \frac{1m}{1 \times 10^{9}nm}}} = \boldsymbol{3.31} \times 10^{19}J$$

$$\boldsymbol{E^{mol}_{fotón}} = \boldsymbol{3.31} \times 10^{19}J \cdot N_A \approx 2 \times 10^{5}\frac{J}{mol} = 200\frac{kJ}{mol}$$

8.6a Una luciérnaga de 5,0 g de masa emite luz roja (650 nm) con una potencia de 0,10 W totalmente hacia atrás. ¿A qué velocidad estará acelerada después de 10 años si es liberada en el espacio libre y se supone que continúa viviendo?

Solución: Cada fotón que es emitido por la luciérnaga aumenta el momento de la luciernaga en:

$$\boldsymbol{p = \frac{h}{\lambda}}$$

Así que debemos de caulcular el número de fotones que fueron emitidos por la luciérnaga a lo largo de esos 10 años; la energía total emitida es $\boldsymbol{P\Delta t}$ y se iguala al número N de fotones emitidos con longitud $\boldsymbol{\lambda}$

$$N = \frac{\lambda P \Delta t}{hc}$$

Así que la cantidad de momento transmitido es:

$$\boldsymbol{p^{10\ años} = Np =} \frac{\lambda P \Delta t}{hc} \cdot \boldsymbol{\frac{h}{\lambda} = \frac{P\Delta t}{c}}$$

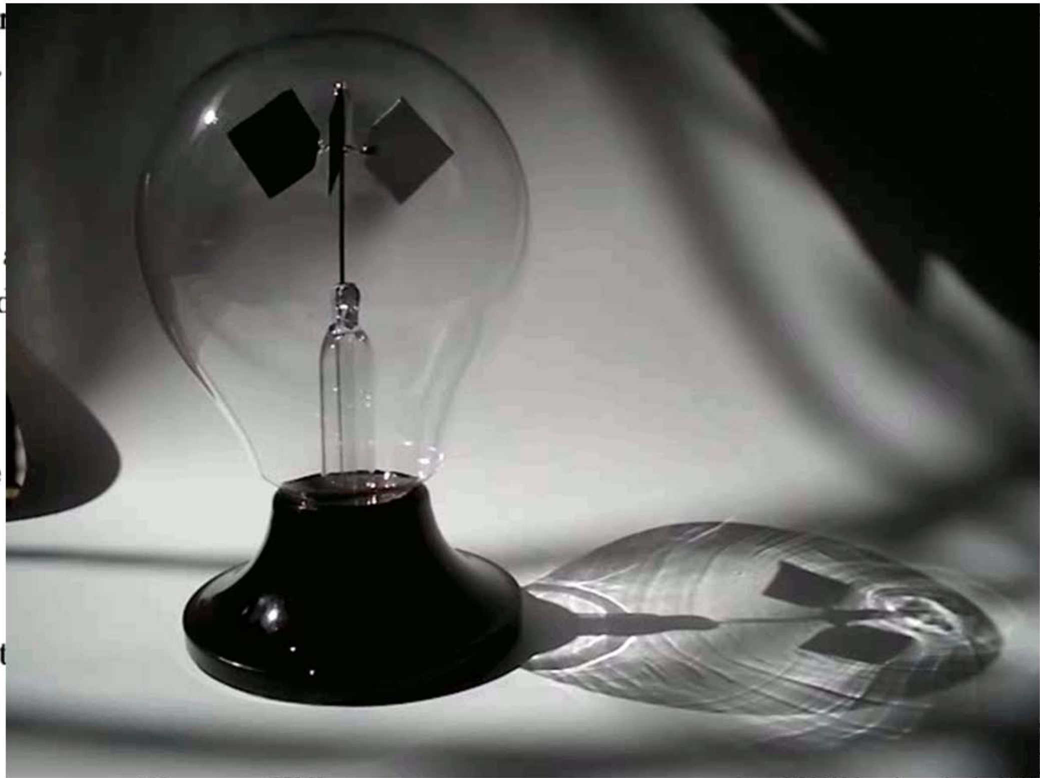
Igualamos ese momento lineal a mv; por lo tanto:

$$\boldsymbol{v = \frac{p^{10\ años}}{m} = \frac{P\Delta t}{mc}} \qquad \boldsymbol{\Delta t = 10 años \cdot \left(\frac{360 días}{1 año}\right) \cdot \left(\frac{24\ hr}{1\ día}\right) \cdot \left(\frac{3600 s)}{1 hr}\right) = 3.11} \times 10^8 s$$

$$\boldsymbol{v = \frac{0.1W \cdot 3.11 \times 10^8 s}{(5 \times 10^{-3} kg) \cdot (3 \times 10^8 \frac{m}{s})} = 20.74 \frac{m}{s}}$$

8.6a Una luciérnaga de 5,0 g de masa emite luz roja (650 nm) con una potencia de 0,10 W totalmente hacia atrás. ¿A qué velocidad estará acelerada después de 10 años si es liberada en el espacio libre y se supone que continúa viviendo?

Solución ... nto de la luciernaga



Así que ... por la luciérnaga ... guala al número N ...

Así que la cantidad de

Igualamos ese moment

$$m \quad mc \quad \ldots \left(\frac{\ldots}{1año}\right) \cdot \left(\frac{\ldots r}{1 día}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{3600s}}{\mathbf{1hr}}\right) = \mathbf{3.11} \times 10^8 s$$

$$v = \frac{\mathbf{0.1W} \cdot \mathbf{3.11} \times 10^8 s}{(5 \times 10^{-3} kg) \cdot (3 \times 10^8 \frac{m}{s})} = \mathbf{20.74} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

8.11 (b) **Muestre que las combinaciones lineales $\hat{A}+i\hat{B}$ y $\hat{A}-i\hat{B}$ no son hermíticas si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son operadores hermíticos.**

Recordemos la definición de operador hermítico: $\int f_i^*\left(\hat{L}\, f_j\right)d\tau = \int\left(\hat{L}^*\, f_i^*\right)f_j\, d\tau$

Entonces se cumple que: $\int \Psi_i^*\left(\hat{A}\Psi_j\right)d\tau = \int\left(\hat{A}\,\Psi_i\right)^*\Psi_j\, d\tau$ y $\int \Psi_i^*\left(\hat{B}\Psi_j\right)d\tau = \int\left(\hat{B}\Psi_i\right)^*\Psi_j\, d\tau$

Y lo que hay que demostrar es que: $\int \Psi_i^*\left(\hat{A}\pm i\hat{B}\right)\Psi_j\, d\tau \neq \int \Psi_j^*\left[\left(\hat{A}\pm i\hat{B}\right)\Psi_i\right]^* d\tau$

Término de la izquierda:

$$\int \Psi_i^*\left(\hat{A}\pm i\hat{B}\right)\Psi_j\, d\tau$$

$$= \int \Psi_i^*\left(\hat{A}\right)\Psi_j\, d\tau \pm \int \Psi_i^*\left(i\hat{B}\right)\Psi_j\, d\tau$$

$$= \left[\int \Psi_j^*\left(\hat{A}\right)^*\Psi_i\, d\tau\right]^* \pm \left[\int \Psi_j^*\left(i\hat{B}\right)^*\Psi_i\, d\tau\right]^*$$

$$\boxed{= \int \Psi_i^*\left(\hat{A}\right)\Psi_j\, d\tau \pm \int \Psi_i^*\left(i\hat{B}\right)\Psi_j\, d\tau}$$

Son diferentes

Término de la derecha:

$$\int\left[\left(\hat{A}\pm i\hat{B}\right)^*\Psi_i^*\right]\Psi_j\, d\tau$$

$$= \int\left(\hat{A}^*\Psi_i^* \mp i\hat{B}^*\Psi_i^*\right)\Psi_j\, d\tau$$

$$= \int\left(\hat{A}^*\Psi_i^*\right)\Psi_j \mp \left(i\hat{B}^*\Psi_i^*\right)\Psi_j\, d\tau$$

$$\boxed{= \int \Psi_i^*\left(\hat{A}\Psi_j\right)d\tau \mp \int \Psi_i^*\left(i\hat{B}\Psi_j\right)d\tau}$$

8.2 Para un cuerpo negro, la temperatura y la longitud de onda de la emisión máxima $\boldsymbol{\lambda_{max}}$. Están relacionadas por la ley de Wien, $\boldsymbol{\lambda_{max}T = \frac{1}{5}c_2}$, donde $\boldsymbol{c_2 = \frac{hc}{k}}$,(véase Problema 8.10). Los valores de $\boldsymbol{\lambda_{max}}$ fueron determinados para un orificio diminuto en un recipiente calentado eléctricamente a diversas temperaturas y los resultados se dan en la tabla adjunta. Deduzca el valor de la constante de Planck.

$\theta/°C$	1000	1500	2000	2500	3000	3500
λ_{max}/nm	2181	1600	1240	1035	878	763
$\lambda_{max}T$ / (10^6 nm K)	2.776	2.837	2.819	2.870	2.874	2.879

$$\lambda_{max}T = 2.84 \times 10^6 nmK = 2.84 \times 10^{-3} mK$$

$$\lambda_{max}T = \frac{1}{5}c_2 = \frac{1}{5}\frac{hc}{k}$$

$$h = \frac{5k\lambda_{max}T}{c} = \frac{5\left(1.38 \times 10^{-23}\frac{J}{K}\right)\left(2.84 \times 10^{-3} mK\right)}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}$$

$$h = 6.53 \times 10^{-34} Js$$

Tarea 3

8.1 b ¿A qué velocidad se debe acelerar un protón para que alcance una longitud de onda de 3,0 cm?

8.2b Calcule el momento lineal de fotones de longitud de onda 350 nm. ¿Qué velocidad necesita una molécula de hidrógeno para tener el mismo momento?

8.3b La velocidad de cierto electrón es de 995 km s^{-1}. Si la indeterminación en su momento debe reducirse a 0,0010 por ciento, ¿qué indeterminación debe tolerarse en su posición?

8.6b Un vehículo espacial de 10,0 kg de masa impulsado por fotones emite radiación de 225 nm de longitud de onda con una potencia de 1,50 kW total mente hacia atrás. ¿A qué velocidad estará acelerado después de 10 años si es liberado en el espacio libre?

8.13a En un experimento foto electrónico de rayos X, un fotón de 150 pm de longitud de onda arranca un electrón desde la capa interna de un átomo que sale con una velocidad de 21.4$Mm\ s^{-1}$. Calcule la energía de enlace del electrón.

B.11a Verifique que el operador $\widehat{l_z} = \frac{h}{i}\frac{d}{d\Phi}$, donde *Φ* es un ángulo, es hermítico

8.14a Determine los conmutadores de los operadores (a) d/d*x* con *l/x*, (b) d/d*x* con x^2.

Tarea 3

8.9 Demuestre que la distribución de Planck se reduce a la ley de Rayleigh Jeans a longitudes de onda elevadas.

8.10 Derive la ley de Wien, que afirma que $\lambda_{max}T$ es una constante, donde λ_{max} es la longitud de onda correspondiente al máximo de la distribución de Planck a la temperatura *T* y deduzca una expresión para la constante como múltiplo de la segunda constante de radiación, $c_2 = hc/k$.

8.11 Utilice la distribución de Planck para deducir la ley de Stefan-Boltzmann, que afirma que la densidad total de energía de un cuerpo negro es proporcional a T^4 y encuentre la constante de proporcionalidad.

8.12 Antes de que Planck expresara la ley de distribución de la radiación de un cuerpo negro, Wien encontró empíricamente una función de distribución estrechamente relacionada, que esta aproximadamente, pero no exactamente, de acuerdo con los resultados experimentales. Esta es, $\rho = \frac{a}{\lambda^5}e^{-\frac{b}{\lambda kT}}$. Esta fórmula tiene pequeñas desviaciones con respecto a la de Planck a longitudes de onda largas. (a) Mediante un ajuste de la formula empírica de Wien a la de Planck a longitudes de onda cortas, determine las constantes a y b. (b) Demuestre que la fórmula de Wien es compatible con la ley de Wien (Problema 8.10) y con la ley de Stefan-Boltzmann (Problema 8.11).