

Representaciones gráficas: Método del Paralelogramo

La relación funcional más simple entre dos variables es la línea recta. Sea entonces la variable independiente x y la variable dependiente y que se relacionan a través de la función:

$$y = mx + b \quad (1)$$

Y como tanto y como x tienen incertidumbres asociadas, la ecuación (1) se escribe como:

$$(y_c + \Delta y) = m(x_c + \Delta x) + b \quad (2)$$

Donde m y b son los parámetros que definen la relación funcional y se conocen como pendiente y ordenada al origen, respectivamente. Estos parámetros son constantes y a su vez también tienen incertidumbres asociadas.

En la figura 1 se muestra una representación típica donde se han graficado las mediciones de x e y , así como sus incertidumbres. Los valores centrales de las mediciones se encuentran justo en el centro de las cruces y las barras de error representan la incertidumbre de cada medición.

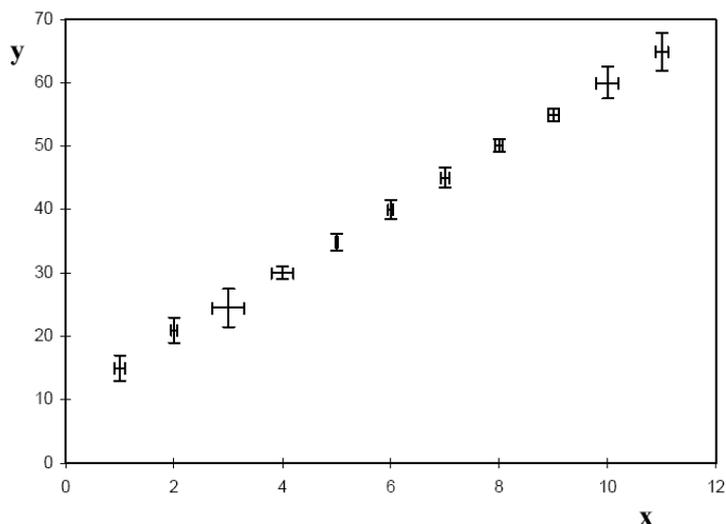


Figura 1. Relación funcional lineal entre dos medurandos.

Por simple inspección de la figura 1 es posible decir que los medurandos x e y se relacionan a través de una función lineal. El problema ahora consiste en asociar una recta a los puntos determinados experimentalmente, ya que se pueden escoger un sinnúmero de rectas que pases a través de las diferentes cruces. Se sugiere entonces el procedimiento que se describe a continuación para realizar la asignación de la recta. Este procedimiento se conoce como de *construcción de un paralelogramo de incertidumbre* y no solo nos permite obtener la recta que define la relación entre x e y sino también las incertidumbres asociadas a m y a b .

Construcción de un paralelogramo de incertidumbre

Paso 1. Trazar la recta central

Para ello nos auxiliamos de una regla transparente o de un hilo, de modo que podamos trazar la recta que menos se separa de cualquiera de los puntos representados en el gráfico.

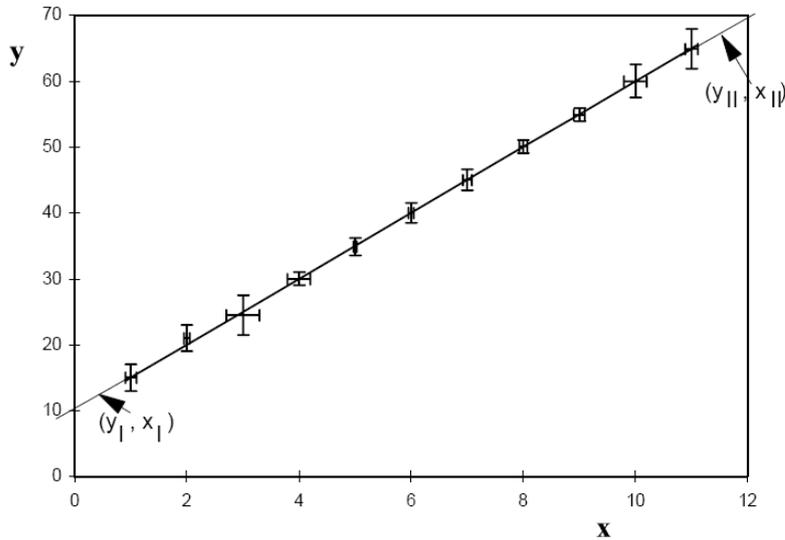


Figura 2. Trazo de la recta central. Se han señalado los puntos que se utilizan para el cálculo de la pendiente y la ordenada al origen de la recta central.

Paso 2. Determinación de los parámetros de la recta central.

A partir de dos puntos que se encuentren sobre la recta central, tomados lo más alejados posible, se determinan los parámetros según:

-Valor central de la pendiente (m_c)

$$m_c = \frac{y_{II} - y_I}{x_{II} - x_I} \quad (3)$$

-Valor central de la ordenada al origen (b_c)

$$b_c = y_{II} - m_c x_{II} = y_I - m_c x_I \quad (4)$$

Paso 3. Trazo de las rectas superior e inferior del paralelogramo de incertidumbre.

Las incertidumbres de los puntos determinados experimentalmente (x e y) llevan a incertidumbres en los parámetros (m y b). Para resolver este problema se trazan dos rectas paralelas a la recta central una por encima y una por debajo, de forma tal que se encuentren tan cercanas a la recta central como sea posible pero incluyendo todas las barras de error en y y asociadas a las incertidumbres (cruces).

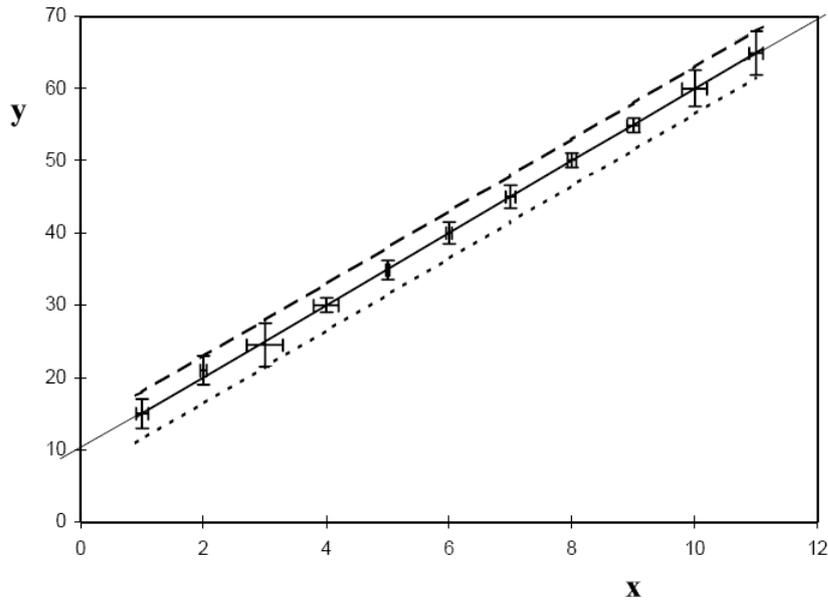


Figura 3. Trazo de las rectas paralelas superior e inferior.

Paso 4. Trazo de los límites del paralelogramo de incertidumbre.

Se trazan ahora dos rectas verticales (paralelas al eje y) delimitadas por las barras de error en x más extremas. O sea barra de error por defecto (izquierda) del punto con menor valor de x y barra de error por exceso (derecha) del punto con mayor valor de x . Las intersecciones de estas rectas con las paralelas superior e inferior trazadas en el paso anterior constituyen los vértices del paralelogramo y por tanto definen el paralelogramo de incertidumbre

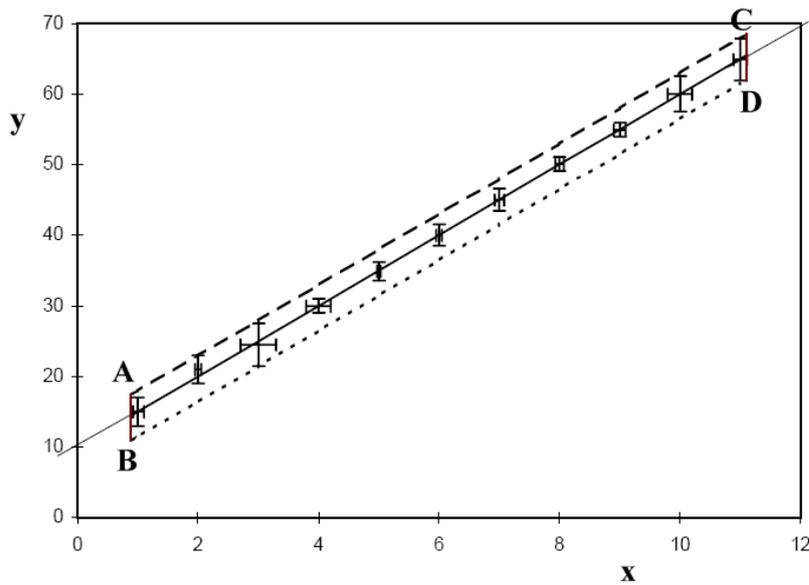


Figura 4. Localización de los cuatro vértices del paralelogramo de incertidumbre.

Paso 5. Trazo de las diagonales del paralelogramo de incertidumbres

Se trazan las diagonales:

- diagonal inferior: une a los puntos A y D
- diagonal superior une a los puntos B y C

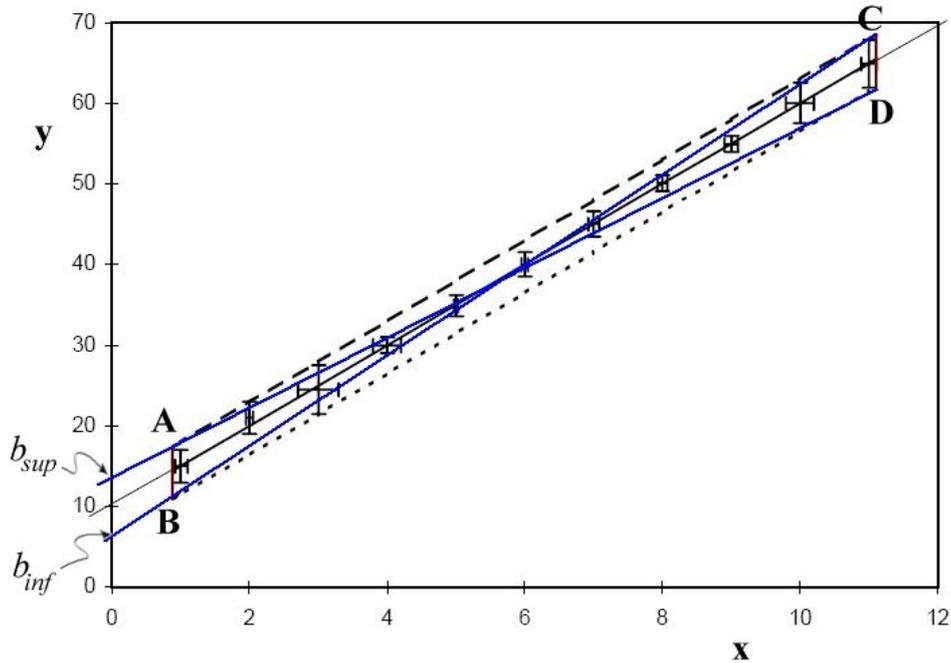


Figura 5. Aspecto final del paralelogramo de incertidumbres, incluyendo: la recta central, las paralelas superior e inferior, las verticales y las diagonales inferior y superior.

Objetivo final de la construcción del paralelogramo de incertidumbres:

Es la determinación de la propagación de las incertidumbres de los pares de valores obtenidos de las mediciones sobre la pendiente y la ordenada al origen.

Para completar este objetivo nos vamos a auxiliar de las diagonales trazadas y tanto para la diagonal superior como para la inferior vamos a determinar la pendiente y la ordenada al origen. (Mismo procedimiento que el descrito en el Paso 2 para la recta central)

Una vez que tengamos estos valores:

- pendiente de la diagonal superior (m_{sup}), de la recta BC
- pendiente de la diagonal inferior (m_{inf}), de la recta AD
- ordenada al origen de la diagonal inferior (b_{sup}), AD
- ordenada al origen de la diagonal superior (b_{inf}), BC
- pendiente de la recta central (m_c)
- ordenada al origen de la recta central (b_c)

Vamos a calcular las incertidumbres en m y b . Para esto podemos seguir dos procedimientos. El primero que vamos a analizar es el siguiente:

Para hallar la incertidumbre en m calculamos:

$$\Delta m = m_{\text{sup}} - m_C \quad (5)$$

$$\Delta m = m_C - m_{\text{inf}} \quad (6)$$

Y si ambas diferencias conducen a resultados diferentes tomamos como incertidumbre de la pendiente el mayor valor de los obtenidos usando las ecuaciones 5 y 6.

Para hallar la incertidumbre en b calculamos:

$$\Delta b = b_{\text{sup}} - b_C \quad (7)$$

$$\Delta b = b_C - b_{\text{inf}} \quad (8)$$

Y si ambas diferencias conducen a resultados diferentes tomamos como incertidumbre de la ordenada al origen el mayor valor de los obtenidos usando las ecuaciones 7 y 8.

El otro método para calcular las incertidumbres en m y b , que debe llevar a resultados equivalentes consiste en calcular:

$$\Delta m = \frac{m_{\text{sup}} - m_{\text{inf}}}{2} \quad (9)$$

$$\Delta b = \frac{b_{\text{sup}} - b_{\text{inf}}}{2} \quad (10)$$

Una vez calculados Δm y Δb , ya podemos expresar la pendiente y la ordenada al origen como valores centrales con sus respectivas incertidumbres, que es el objetivo final del procedimiento del paralelogramo:

$$m = m_C \pm \Delta m$$

$$b = b_C \pm \Delta b$$