Incertidumbres

¿Es posible obtener el valor real (exacto) de una magnitud a través de mediciones? Aunque parezca sorprende, la respuesta a esta pregunta es NO. El proceso de medición involucra necesariamente el uso de instrumentos y estos siempre tienen asociada una incertidumbre, que a su vez se relaciona con la resolución de dicho instrumento. A lo más que podemos aspirar a proponer un rango de valores dentro del cual debe encontrarse el valor real. Las dos formas más comunes de expresar este rango es mediante un intervalo determinado un valor mínimo límite y un valor máximo límite: $[x_{min}\text{-}x_{max}]$ o como un valor central ± una incertidumbre. Lógicamente como ambas representaciones corresponden al mismo intervalo la relación entre estas representaciones tiene que corresponder a:

$$\text{valor central} = \frac{\left(x_{\max} + x_{\min}\right)}{2} \qquad \textbf{Eq 1}$$

$$\text{incertidumbre} = \frac{\left(x_{\max} - x_{\min}\right)}{2} \qquad \textbf{Eq 2}$$

Tipos de instrumentos

Los instrumentos pueden clasificarse de acuerdo a su tipo de escala como instrumentos *discretos* o *continuos*. En el caso de los instrumentos discretos no es posible hacer apreciaciones intermedias dentro de la mínima división de su escala, un ejemplo claro lo constituyen los instrumentos con escala digital. Es por ello que a este tipo de instrumentos se les asocia una incertidumbre igual a su resolución (resolución del instrumento = división más pequeña de su escala). En el caso de los instrumentos continuos, por el contrario, si es posible hacer estimaciones intermedias dentro de la mínima división de la escala. Un ejemplo de este tipo de instrumentos es la regla milimétrica, en este caso aun cuando la división mínima de la escala es de 1mm, si observamos cuidadosamente podríamos estimar si una longitud es intermedia entre 12.3 y 12.4 cm, por ejemplo. Es por ello que a este tipo de instrumentos se le asocia una incertidumbre igual a al mitad de su resolución.

Algunas formas de expresar las incertidumbres

Incertidumbre absoluta: En general se representa con una letra delta mayúscula (Δ) inmediatamente antes del símbolo que represente a la variable de interés. No es más que el valor absoluto de la diferencia entre el valor real y el valor medido. Sin embargo como el valor real es por definición desconocido, se utilizan las reglas prácticas explicadas anteriormente para asociar una incertidumbre a cada medición. La incertidumbre absoluta tiene las mismas unidades que la variable a la que está asociada y no depende de la magnitud de esta sino solamente de la resolución del instrumento utilizado. Así por ejemplo si utilizamos un flexómetro (instrumento continuo, de resolución=1mm) para medir tanto la longitud de un lápiz como la altura de una puerta, las incertidumbres absolutas de ambas mediciones serán idénticas. Por ejemplo:

Largo del lápiz: $l \equiv l_C \pm \Delta l = (8.00 \pm 0.05)$ cm

Alto de la puerta: $a \equiv a_C \pm \Delta a = (210.40 \pm 0.05)$ cm donde el subíndice c indica valor central

Incertidumbre relativa: Representa que proporción del valor reportado es dudosa. En estas notas utilizaremos el símbolo Δ_R inmediatamente antes del símbolo que represente a la variable de interés para representar la incertidumbre relativa. Para ilustrar más claramente este concepto utilizaremos de nuevo los ejemplos del largo del lápiz y el alto de la puerta.

Largo del lápiz: $\Delta_R\, l = \frac{\Delta l}{l_C} = \frac{0.05cm}{8.00cm} = 0.0625$

Alto de la puerta: $\Delta_R\, a = \frac{\Delta a}{a_C} = \frac{0.05cm}{210.40cm} = 0.000238$

Como puede apreciarse las incertidumbres relativas son adimensionales (no tienen unidades) y dependen de la magnitud de la variable medida. Mientras mayor sea el valor central menor será la incertidumbre relativa (para incertidumbres absolutas iguales)

Incertidumbre porcentual: También representa que proporción del valor reportado es dudosa, pero en este caso en tanto porciento. En estas notas utilizaremos el símbolo $\Delta_{\%}$ inmediatamente antes del símbolo que represente a la variable de interés para representar la incertidumbre porcentual. Utilicemos una vez más los ejemplos del largo del lápiz y el alto de la puerta para ilustrar este concepto.

Largo del lápiz: $\Delta_{\%}\, l = \frac{\Delta l}{l_C} \times 100\% = \frac{0.05cm}{8.00cm} \times 100\% = 6.25\%$

Alto de la puerta: $\Delta_{\%}\, a = \frac{\Delta a}{a_C} \times 100\% = \frac{0.05cm}{210.40cm} \times 100\% = 0.0238\%$

Al igual que las incertidumbres relativas, las incertidumbres porcentuales son adimensionales) y dependen de la magnitud de la variable medida. Mientras menor sea el valor central mayor será el error porcentual cometido (para incertidumbres absolutas iguales)

Tipos de Mediciones

Mediciones directas

Se dice que una medición es directa cuando se obtiene el valor de una magnitud de interés directamente de la lectura de un instrumento, sin necesidad de involucrar ninguna operación matemática. Por ejemplo si queremos medir la longitud de una mesa y utilizamos para ello un flexómetro. En este caso la incertidumbre asociada a dicha medición depende solamente del tipo y de la resolución del instrumento, según las reglas explicadas anteriormente.

Mediciones indirectas

Se dice que una medición es indirecta cuando no es posible obtener el valor de la magnitud de interés directamente de la lectura de un instrumento, y es necesario hacer cálculos matemáticos para obtenerlo. Por ejemplo si queremos conocer el área de una superficie cuadrada, tendremos que medir la longitud del lado con un instrumento adecuado, digamos que un flexómetro, pero luego tendremos que elevar el resultado de esa medición al cuadrado para obtener el área. En este caso la medición del área es indirecta. Para obtener las incertidumbres asociadas con mediciones indirectas es necesario realizar un procedimiento matemático conocido como propagación de incertidumbres, que se explica a continuación.

Propagación de Incertidumbres

El valor de las incertidumbres asociadas a mediciones indirectas, obviamente dependerá de las incertidumbres correspondientes a las mediciones directas utilizadas para obtenerlas los valores indirectos. En el ejemplo del área de una superficie cuadrada, la incertidumbre asociada al área lógicamente dependerá de la incertidumbre con que se estimó la longitud del lado, la pregunta es: ¿cómo?. A continuación veremos como se calculan las incertidumbres asociadas a mediciones indirectas, que involucran algunas operaciones algebraicas comunes y luego veremos una expresión general.

Sumas y restas

Imaginemos dos variables independientes, ***a*** y ***b***, de las que conocemos que:

$$a = a_c \pm \Delta a \qquad \textbf{Eq 3}$$

$$b = b_c \pm \Delta b \qquad \textbf{Eq 4}$$

Si queremos obtener el valor de otra variable (***s***) que se obtiene como la suma de las dos anteriores:

$$s = a + b \qquad \textbf{Eq 5}$$

y la queremos expresar como:

$$s = s_c \pm \Delta s \qquad \textbf{Eq 6}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 5 obtenemos:

$$s = (a_c \pm \Delta a) + (b_c \pm \Delta b) \qquad \textbf{Eq 7}$$

Y reagrupando:

$$s = (a_c + b_c) \pm (\Delta a + \Delta b) \qquad \textbf{Eq 8}$$

Comparando ahora las ecuaciones 6 y 8 es evidente que:

$$s_c = a_c + b_c \qquad \textbf{Eq 9}$$

$$\Delta s = \Delta a + \Delta b \qquad \textbf{Eq 10}$$

Si consideramos ahora la variable *r* que se obtiene como la resta de *a* menos *b*:

$$r = a - b \qquad \textbf{Eq 11}$$

y la queremos expresar como:

$$r = r_c \pm \Delta r \qquad \textbf{Eq 12}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 11 obtenemos:

$$r = (a_c \pm \Delta a) - (b_c \pm \Delta b) \qquad \textbf{Eq 13}$$

Y reagrupando:

$$r = (a_c - b_c) + (\pm \Delta a \mp \Delta b) \qquad \textbf{Eq 14}$$

que tambien podemos escribir como

$$r = (a_c - b_c) \pm (\Delta a + \Delta b) \qquad \textbf{Eq 15}$$

Y comparando ahora las ecuaciones 11 y 15 es evidente que:

$$r_c = a_c - b_c \qquad \textbf{Eq 16}$$

$$\Delta r = \Delta a + \Delta b \qquad \textbf{Eq 17}$$

Según lo que hemos visto tanto para las sumas como para las restas la incertidumbre absoluta se obtiene como la suma de las incertidumbres absolutas de los sumandos. Recordemos que la resta no es más que un caso particular de la suma, donde uno de los sumandos es un número negativo.

Multiplicaciones y potencias

Utilicemos un procedimiento similar para obtener la expresión de la incertidumbre de la variable p, definida como el producto de a por b:

$$p = ab \qquad \textbf{Eq 18}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 18 obtenemos:

$$p = \left(a_c \pm \Delta a\right)\left(b_c \pm \Delta b\right) \qquad \textbf{Eq 19}$$

Desarrollando el producto:

$$p = a_c b_c \pm a_c \Delta b \pm b_c \Delta a \pm \Delta a \Delta b \qquad \textbf{Eq 20}$$

que tambien podemos escribir como

$$p = \left(a_c b_c\right) \pm \left(a_c \Delta b + b_c \Delta a + \Delta a \Delta b\right) \qquad \textbf{Eq 21}$$

Y comparando ahora las ecuaciones 11 y 15 es evidente que:

$$p_c = a_c b_c \qquad \textbf{Eq 22}$$

$$\Delta p = a_c \Delta b + b_c \Delta a + \Delta a \Delta b \qquad \textbf{Eq 23}$$

Pero como el último término de la derecha es un producto de incertidumbres, es muy pequeño en comparación con los demás y lo podemos despreciar, de modo que la ecuación 23 quedaría simplificada a:

$$\Delta p = a_c \Delta b + b_c \Delta a \qquad \textbf{Eq 24}$$

Esta expresión permite calcular la incertidumbre absoluta de un producto de dos factores, siguiendo el mismo razonamiento puede demostrarse que para un producto de tres factores:

$$p3_c = a_c b_c c_c \qquad \textbf{Eq 25}$$

$$\Delta p3 = a_c b_c \Delta c + a_c c_c \Delta b + b_c c_c \Delta a \qquad \textbf{Eq 26}$$

Y así sucesivamente, de modo que la incertidumbre absoluta del producto será una suma de tantos términos como factores tenga el producto, y cada uno de ellos corresponde a la incertidumbre de uno de los factores multiplicada por los valores centrales de los otros factores.

Retomemos ahora el producto de dos factores y encontremos la expresión algebraica correspondiente a su incertidumbre relativa. Utilizando la ecuación 24 y la definición de la incertidumbre relativa se llega a:

$$\Delta_R\, p = \frac{\Delta p}{p_C} = \frac{a_c \Delta b + b_c \Delta a}{a_c b_c} = \frac{a_c \Delta b}{a_c b_c} + \frac{b_c \Delta a}{a_c b_c}$$

Y simplicando esta expresión llegamos a:

$$\frac{\Delta p}{p_C} = \frac{\Delta b}{b_c} + \frac{\Delta a}{a_c} \qquad \textbf{Eq 27}$$

O sea que:

$$\Delta_R p = \Delta_R a + \Delta_R b \qquad \textbf{Eq 28}$$

De modo que en el caso de los productos la incertidumbre relativa del producto es igual a la suma de las incertidumbres relativas de los factores. En el caso del producto de dos factores esta nueva expresión no parece mucho mas simple que la ecuación 24, pero en la medida en que el número de los factores se incrementa el procedimiento matemático para propagar las incertidumbres se hace más sencillo si se utiliza el procedimiento de las incertidumbres relativas en lugar del de las absolutas. Recordemos que estas dos formas de expresar las incertidumbres son fácilmente interconvertibles para una variable cualquiera v, a partir de su definición:

$$\Delta_R v = \frac{\Delta v}{v_c} \qquad \textbf{Eq 29}$$

Siguiendo la misma lógica aplicada ahora para la potencia (que no es más que un producto donde se multiplica n veces el mismo factor), si:

$$P = a^n \qquad \textbf{Eq 30}$$

Se puede demostrar que las expresiones correspondientes a sus incertidumbres absoluta y relativa son, respectivamente:

$$\Delta P = n a \Delta a \qquad \textbf{Eq 31}$$

$$\Delta_R P = n \Delta_R a \qquad \textbf{Eq 32}$$

Expresión general

En casos más complicados que los que se han tratado hasta ahora, es más conveniente considerar una expresión general para poder estimar la propagación de las incertidumbres. Esta expresión se presenta a continuación sin demostración para una función $\boldsymbol{y}$ de varias variables ($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, ... , $\boldsymbol{x_n}$), donde las variables $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, ... , $\boldsymbol{x_n}$ son variables independientes de las que conocemos su valor central y su incertidumbre, entonces la incertidumbre absoluta de $\boldsymbol{y}$ puede obtenerse como:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \cdots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| \Delta x_i + \cdots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right| \Delta x_n \qquad \textbf{Eq 33}$$

Veamos un ejemplo. Para la variable D, definida como:

$$D = \frac{a^2}{b^3} \qquad \textbf{Eq 34}$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación 33, la incertidumbre absoluta de D se podrá obtener según:

$$\Delta D = \left|\frac{\partial D}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial D}{\partial b}\right| \Delta b \qquad \textbf{Eq 35}$$

$$\Delta D = \left|\frac{2a}{b^3}\right| \Delta a + \left|-\frac{3a^2}{b^4}\right| \Delta b \qquad \textbf{Eq 36}$$

Y como conocemos tanto los valores centrales, como las incertidumbres absolutas de a y de b, podemos obtener la de D a partir de estos valores:

$$\Delta D = \frac{2a_c}{b_c^3} \Delta a + \frac{3a_c^2}{b_c^4} \Delta b \qquad \textbf{Eq 37}$$